Or $V_q = U_q + \frac{1}{q!} \Rightarrow V_q \geq U_q$ d'où $U_p \leq U_q \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

2ème Cas :

Si $q \leq p \Rightarrow V_p \leq V_q$ (car (V_n) est décroissante)

Et on a : $V_p \geq U_p$ d'où $U_p \leq V_p \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

Conclusion : $\forall p \in \mathbf{N}\ \ q \in \mathbf{N}^*,\ U_p \leq V_q$.

• On a : $\forall p \in \mathbf{N}\ \ q \in \mathbf{N}^*,\ U_p \leq V_q$

On choisit $p = n$ et $q = 1$ donc $U_n \leq V_1 = 3$

(U_n) est une suite croissante majorée par 3 donc elle converge.

• On choisit $p = 0$ et $q = n$ donc $U_0 \leq V_n$.

Or $U_0 = 1 \Rightarrow V_n \geq 1$ et par suite (V_n) est décroissante minorée par 1 donc elle converge.

3°/ Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

$V_n - U_n = \frac{1}{n!}$ or $n! \geq n \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq V_n - U_n \leq \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$ et par suite $l = l'$.

Solution 9 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

• Pour $n = 0$, $U_0 = 1 = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0!)^2} \cdot \frac{1}{2^0}$

• Supposons que pour un entier donné n , $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$ et montrons que

$U_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2(n+1)}}$

On a : $U_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot U_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$